

۱- گزینه ۳ صحیح است.

چون در ناحیه مورد نظر رفتار x و z کاملاً شبیه به هم است، پس حاصل انتگرال روی این ناحیه هم رفتار تابع

$$\frac{e^{x^2} + 3e^{y^2}}{e^{x^2} + 6e^{y^2} + e^{z^2}} \text{ با انتگرال تابع } \frac{e^{z^2} + 3e^{y^2}}{e^{x^2} + 6e^{y^2} + e^{z^2}} \text{ برابر است و داریم:}$$

$$I + I = \iiint_W \frac{e^{x^2} + 3e^{y^2} + e^{z^2} + 3e^{y^2}}{e^{x^2} + 6e^{y^2} + e^{z^2}} dv = \iiint_W dv = V_W = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3}) \Rightarrow I = 2\pi\sqrt{3}$$

۲- گزینه ۲ درست است.

با استفاده از راه دکارتی انتگرال را حل می کنیم.

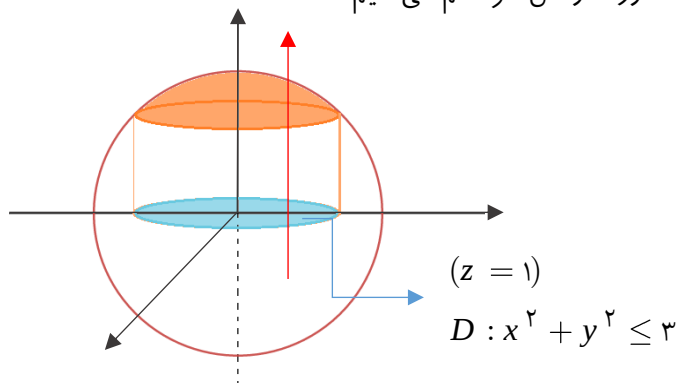
$$I = \iint_{D: x^2+y^2 \leq 1} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} x^2 dz dA = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 \sqrt{x^2+y^2} dA$$

باتوجه به ظاهر شدن $x^2 + y^2$ از قطبی استفاده می کنیم.

$$I = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta = 2 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^1 r^4 dr \right) = 2(\pi) \left(\frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{5}$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

برای بدست آوردن حجم ناحیه بزرگتر حجم ناحیه کوچکتر را بدست آورده و کل کره کم می کنیم.



$$V = \iiint_W dv = \iint_{x^2+y^2 \leq 3} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-r^2} - 1)r dr d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\sqrt{3}} (r\sqrt{4-r^2} - r) dr \right) = (2\pi) \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) - \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = (2\pi) \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) = \frac{5\pi}{3}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(2)^3 - \frac{5\pi}{3} = \frac{27\pi}{3} = 9\pi$$

۴- گزینه ۱ صحیح است.

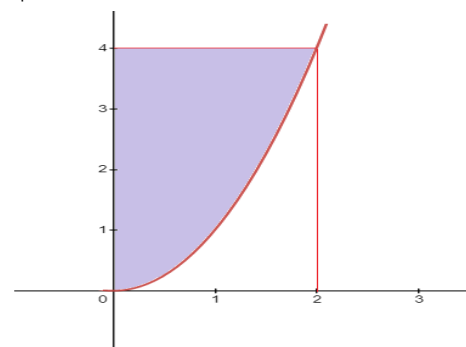
باتوجه به اینکه در $\frac{1}{8}$ فضا هستیم، $x, y, z > 0$ خواهند بود.

$$V = \iiint_W dv = \iint_{y \leq x^2} \int_0^{4-y} dz dA = \iint_{y \leq x^2} (4-y) dA$$

جهت تعیین محدودیتی برای $y = x^2$ کافی است تصویر $z + y = 4$ را روی xOy ($z = 0$) بدست می آوریم.

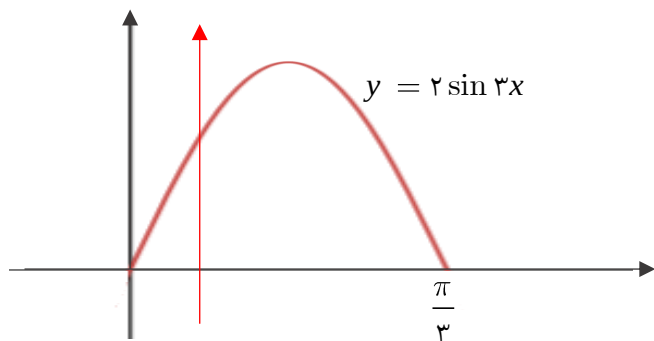
$$V = \int_0^2 \int_{x^2}^4 (4-y) dy dx = \int_0^2 \left(4y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^4 dx = \int_0^2 (16 - 8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2}) dx$$

$$= \left(8x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^2 = 16 - \frac{32}{3} + \frac{32}{15} = \frac{240 - 160 + 48}{15} = \frac{128}{15}$$



۵- گزینه ۴ صحیح است.

فاصله مرکز ثقل از محور x ها همان $\bar{y}$ است. ناحیه مورد نظر نیز فضای بین دو منحنی دو بعدی است. پس باید از انتگرال دوگانه استفاده نماییم.



$$\frac{-}{y} = \frac{\iint y \delta(x,y) \, \mathrm{d}A}{\iint \delta(x,y) \, \mathrm{d}A} = \frac{\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\mathfrak{r}}} \int_{\circ}^{\mathfrak{r} \sin \mathfrak{r} x} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x}{\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\mathfrak{r}}} \int_{\circ}^{\mathfrak{r} \sin \mathfrak{r} x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x} = \frac{\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\mathfrak{r}}} \left(\frac{y^{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}}\right) \bigg|_{\circ}^{\mathfrak{r} \sin \mathfrak{r} x} \mathrm{d}x}{\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\mathfrak{r}}} \mathfrak{r} \sin \mathfrak{r} x \, \mathrm{d}x} = \frac{\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\mathfrak{r}}} \mathfrak{r} \sin^{\mathfrak{r}} \mathfrak{r} x \, \mathrm{d}x}{-\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} \cos \mathfrak{r} x \bigg|_{\frac{\pi}{\mathfrak{r}}}^{\circ}}$$

$$\frac{\mathfrak{r} x = t}{\mathfrak{r} \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t} \rightarrow \frac{\mathfrak{r} \int_{\circ}^{\pi} \sin^{\mathfrak{r}} t \, \frac{\mathrm{d}t}{\mathfrak{r}}}{-\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} (-1 - 1)} = \frac{\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)}{\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}} = \frac{\pi}{\mathfrak{r}}$$